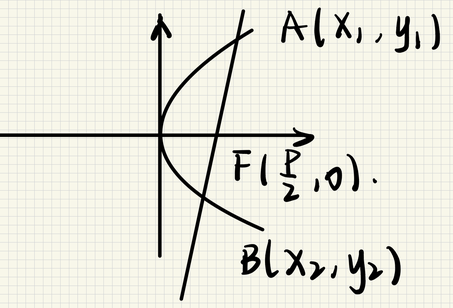


过焦点的任意直线交抛物线于两点

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} \qquad y_1 \cdot y_2 = -p^2$$

证明：韦达定理

设 $AB: x = ty + \frac{p}{2}$（反设）$t = \frac{1}{k}$

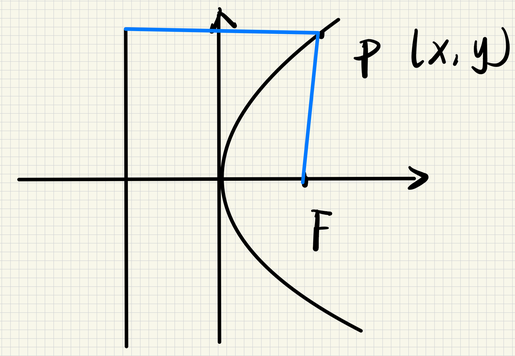
$$y^2 = 2px = 2p\cdot(ty + \frac{p}{2})$$

$$y^2 - 2pty - p^2 = 0$$

$$y_1 + y_2 = 2pt \quad (\text{变值}) \qquad y_1 \cdot y_2 = -p^2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \frac{p^2}{4}$$

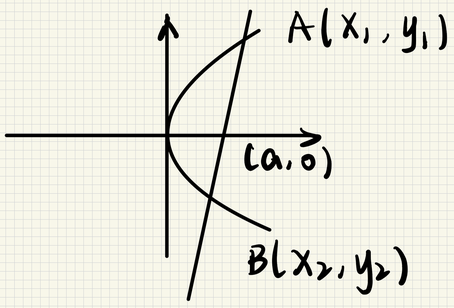
$y^2 = 2px$



准线

定义式 $PF = x + \frac{p}{2}$

推广



$$x_1 \cdot x_2 = a^2$$

$$y_1 \cdot y_2 = -2pa$$

设 $AB: x = ty + a$

$$y^2 = 2px = 2p(ty + a)$$

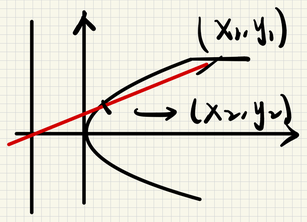
$$y^2 - 2pty - 2pa = 0$$

$$y_1 \cdot y_2 = -2pa$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \frac{4p^2a^2}{4p^2} = a^2$$

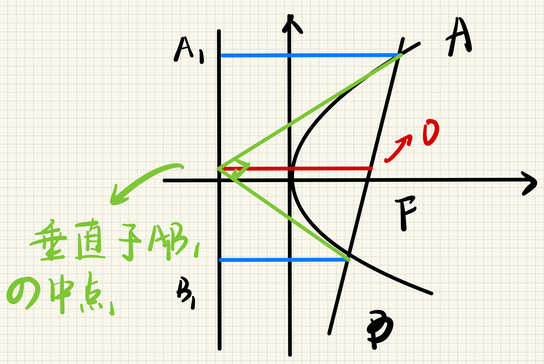
特殊情况

过准线与x轴的交点



$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4}$$

$$y_1 \cdot y_2 = p^2$$

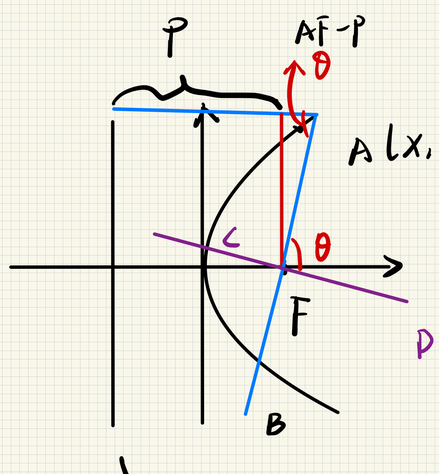


(1) 以AB为直径为圆与准线相切.

(2) AF·(BF) 为直径的圆与y轴相切.

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{AF + BF}{2} = \frac{AB}{2} = r.$$

抛物线焦半径倾斜角式



（开口向右）

$$AF = x_1 + \frac{p}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{AF - P}{AF} \Rightarrow AF \cdot \cos\theta = AF - P.$$

$$AF = \frac{P}{1 - \cos\theta}$$

$$BF = \frac{P}{1 + \cos\theta}$$

同理

准线

$$1.\quad AB = \frac{p(1-\cos\theta) + p(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{2p}{\sin^2\theta}$$

$$2.\quad \frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{1-\cos\theta}{p} + \frac{1+\cos\theta}{p} = \frac{2}{p}$$

$$3.\quad \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{\frac{2p}{\sin^2\theta}} + \frac{1}{\frac{2p}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{2p}$$

$$|CD| = \frac{2p}{\sin^2(\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{2p}{\cos^2\theta}$$

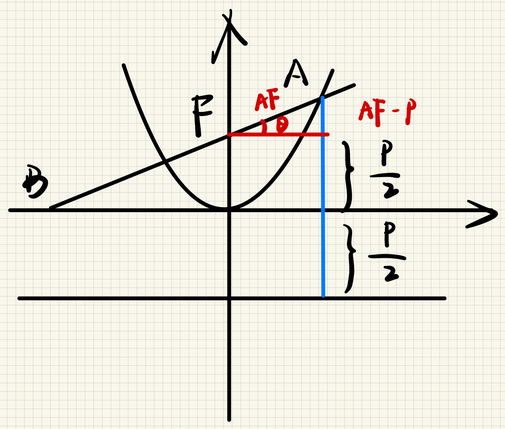
焦点弦长坐标式

$$|AB| = AF + BF = x_1 + \frac{p}{2} + x_2 + \frac{p}{2}$$

$$= x_1 + x_2 + p \geq 2\sqrt{x_1 x_2} + p = 2p.$$

焦点弦长，通径最短.

（开口向上）



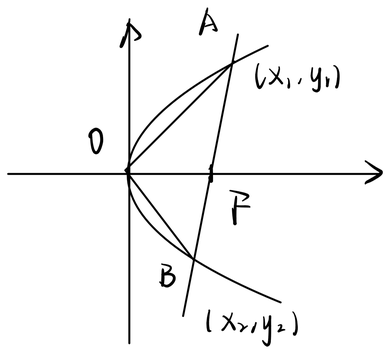
$$\sin\theta = \frac{AF - P}{AF} \Rightarrow \sin\theta \cdot AF = AF - P.$$

$$AF = \frac{P}{1 - \sin\theta}$$

$$BF = \frac{P}{1 + \sin\theta}$$

第 7 讲：抛物线题型拓展

1. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 的任意直线交抛物线于 A,B 两点，则 ΔOAB 的形状是 钝角 .(锐角、钝角、直角)



向量

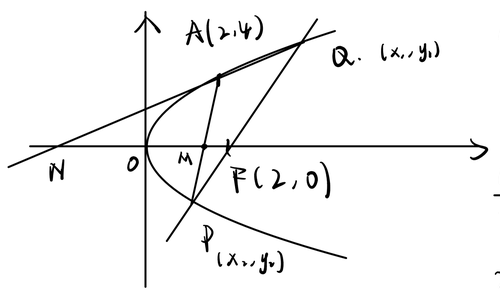
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)(x_2,y_2)$

$=x_1x_2+y_1y_2$

$=\frac{p^2}{4}-p^2<0$

2. 已知 O 为坐标原点，抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$，F 为 C 的焦点，$A(2,4)$，过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 P,Q 两点 (异于点 A)，且 AP,AQ 分别交 x 轴于 M,N 两点，则 $|OM|\cdot|ON|=$ 4 .

$p=4$.



$M(x_M,0)$.

$A(2,4)$.

$P(x_2,y_2)$.

用两点式求 x_M.

$\frac{4-0}{2-x_M}=\frac{y_2-4}{x_2-2}$

$2-x_M=\frac{4(x_1-2)}{y_1-4}=\frac{4(\frac{y_1^2}{8}-2)}{y_1-4}=\frac{1}{2}y_1+2$

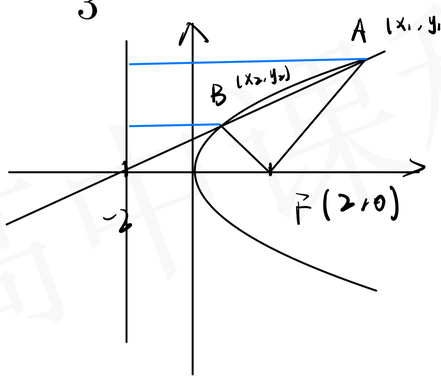
$x_M=-\frac{1}{2}y_1$，同理，$x_N=-\frac{1}{2}y_2$.

$|OM|\,|ON|=\frac{1}{4}|y_1y_2|$

$=\frac{1}{4}p^2=4$.

3. 已知直线 $y=k(x+2)\,(k>0)$ 与抛物线 $C:y^2=8x$ 相交于 A、B 两点，F 为 C 的焦点，若 $|FA|=2|FB|$，则 $k=$ (D)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$



$FA=x_1+\frac{p}{2}=2+x_1=2FB=4+2x_2$

$FB=x_2+\frac{p}{2}=2+x_2$

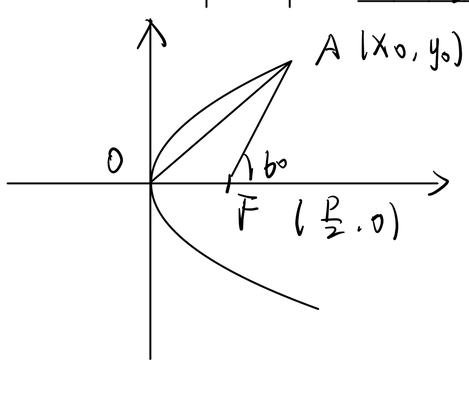
$x_1=2+2x_2$

$x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}=4$.

$x_2=1$.

$k=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

4. 设 O 是坐标原点，F 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，A 是抛物线上的一点，$\overrightarrow{FA}$ 与 x 轴正向的夹角为 $60°$，则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 为 $\frac{\sqrt{21}}{2}p$.



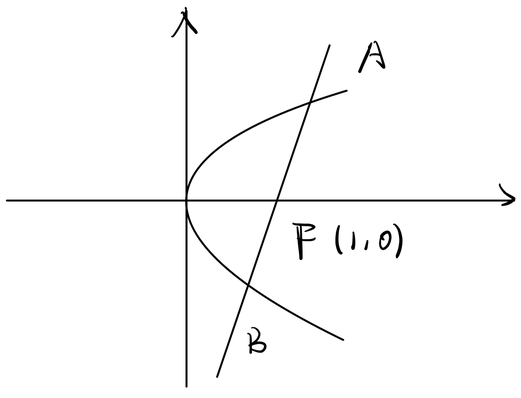
$|\overrightarrow{AF}|=\frac{p}{1-\cos60°}=2p=x_0+\frac{p}{2}$

$x_0=\frac{3}{2}p$

$y_0^2=3p^2$

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}p$.

5. 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A,B，若 $|AF|=3$，则 $|BF|=$ _____ .

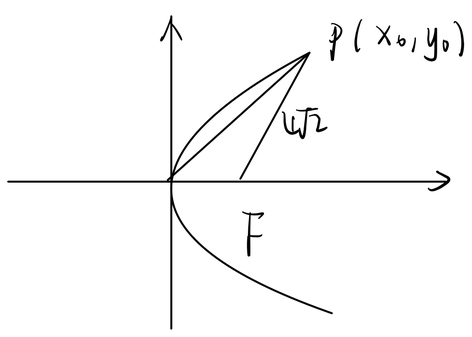


$\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}=\frac{2}{p}$.



6. (2013 全国Ⅰ)O 为坐标原点，F 为抛物线 $C:y^2=4\sqrt{2}x$ 的焦点，P 为 C 上一点，若 $|PF|=4\sqrt{2}$，则 ΔPOF 的面积为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4



$PF=4\sqrt{2}=x_0+\frac{p}{2}$.

$x_0=3\sqrt{2}$.

$y_0^2=24$.

$y_0=\sqrt{24}$.

$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot y_0=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{24}=\sqrt{3}$.

7. (2013·新课标Ⅱ) 设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 过 F 且与 C 交于 A,B 两点．若 $|AF|=3|BF|$，则 l 的方程为（　　）

A. $y=x-1$ 或 $y=-x+1$　　B. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ 或 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

C. $y=\sqrt{3}(x-1)$ 或 $y=-\sqrt{3}(x-1)$　　D. $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$ 或 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

8. (2020·新高考) 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，且与 C 交于 A,B 两点，则 $|AB|=$ _____.

$\theta=60^\circ$.

$AB=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{4}{\frac{3}{4}}=\frac{16}{3}$

9. (2017 全国Ⅰ) 已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，过 F 作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，直线 l_1 与 C 交于 A、B 两点，直线 l_2 与 C 交于 D、E 两点，则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为（　　）

A. 16　　B. 14　　C. 12　　D. 10

高中课程资料微信：NSJ2026

10. 过抛物线 $E: x^2=2py(p>0)$ 的焦点 F 作两条互相垂直的弦 AB, CD，设 P 为抛物线上的一动点，$Q(1,2)$. 若 $\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1}{4}$，则 $|PF|+|PQ|$ 的最小值是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. (2023·新高考Ⅱ) 设 O 为坐标原点，直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 过抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点，且与 C 交于 M, N 两点，l 为 C 的准线，则（　　）　　$\chi = \frac{p}{2}$

A. $p=2$ √.　　B. $|MN|=\frac{8}{3}$ ✗　$|MN| = \frac{2p}{\sin^2\theta} = \frac{16}{3}$

C. 以 MN 为直径的圆与 l 相切 √.　　D. $\triangle OMN$ 为等腰三角形

12. (2013 全国Ⅱ) 设抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上，$|MF|=5$，若以 MF 为直径的圆过点 $(0,2)$，则 C 的方程为（　　）

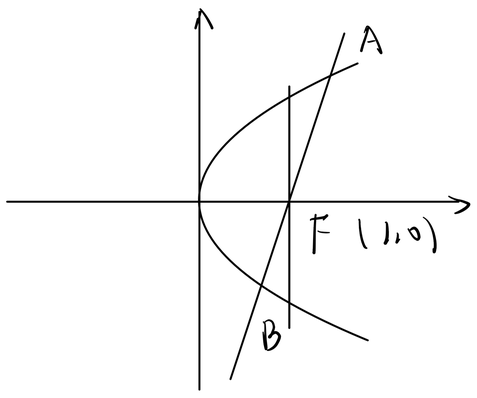
A. $y^2=4x$ 或 $y^2=8x$　　B. $y^2=2x$ 或 $y^2=8x$

C. $y^2=4x$ 或 $y^2=16x$　　D. $y^2=2x$ 或 $y^2=16x$

13. (多选) 过抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点 F 作直线交抛物线 C 于 A, B 两点，则（AC）

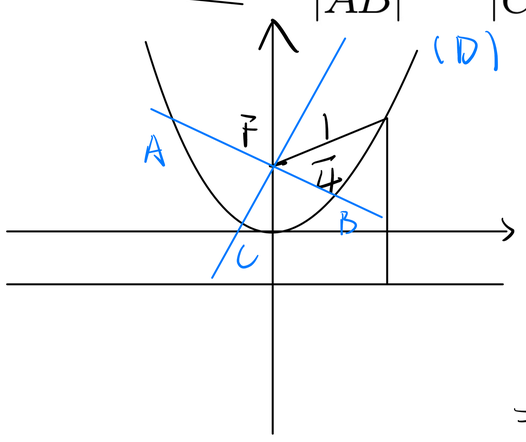
A. $|AB|$ 的最小值为 4　通径，$2p=4$　　B. 以线段 AB 为直径的圆与 y 轴相切 ✗

C. $\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}=1$　$= \frac{2}{p}$ √.　　D. 当 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$ 时，直线 AB 的斜率为 $\pm\sqrt{3}$



高中课程资料 微信：NSJ2026

14. 在平面直角坐标系中，若点 $P(x,y)\,(y\geqslant 0)$ 到点 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 的距离比它到 x 轴的距离大 $\dfrac{1}{4}$，则点 P 的轨迹 Γ 的方程为 $x^2=y$；过点 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 作两条互相垂直的直线分别与曲线 Γ 交于点 A、B 和点 C、D，则 $\dfrac{4}{|AB|^2}+\dfrac{1}{|CD|^2}$ 的最小值为 $\dfrac{4}{5}$.



$AF=\dfrac{p}{1-\sin\theta}$　　$BF=\dfrac{p}{1+\sin\theta}$.

$AB=\dfrac{2p}{\cos^2\theta}\Rightarrow CD=\dfrac{2p}{\cos^2(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$\therefore \dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CD}=\dfrac{1}{2p}=1$.

$\dfrac{1}{AB}=x$　$\dfrac{1}{CD}=y$　$x+y=1$.

$\Rightarrow$ 求 $4x^2+y^2$ 的最小值

$p=2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

柯西不等式

$(4x^2+y^2)\left(\dfrac{1}{4}+1\right)\geqslant(x+y)^2=1$

$4x^2+y^2\geqslant\dfrac{4}{5}$.

$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2$

代换

$x+y=1\Rightarrow y=1-x$.

$4x^2+y^2=4x^2+(1-x)^2$

$=5x^2-2x+1$

$=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}+1=\dfrac{4}{5}$.

15. (多选) 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，直线 $x=ty+m$ 与抛物线交于 A，B 两点，O 为坐标原点，则（　　）

A. 若 $m=\dfrac{p}{2}$，则 $y_1y_2=-p^2$

B. 若 $m=p$，则 $x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$

C. 若 $m=2p$，则 $OA\perp OB$

D. 若 $m=4p$，则 $\triangle OAB$ 面积最小值为 $8\sqrt{2}p^2$

16. (2014 全国Ⅱ理) 设 F 为抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点，过点 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A,B 两点，O 为坐标原点，则 ΔOAB 的面积为（　　）

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$　　C. $\dfrac{63}{32}$　　D. $\dfrac{9}{4}$

17. (2012·安徽) 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A，B 两点，O 为坐标原点. 若 $|AF|=3$，则 $\triangle AOB$ 的面积为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

高中课程资源微信：NSJ2026



18. (2022·新高考Ⅱ) 已知 O 为坐标原点，过抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的直线与 C 交于 A，B 两点，其中 A 在第一象限，点 $M(p,0)$．若 $|AF|=|AM|$，则 (　　)

A. 直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{6}$　　B. $|OB|=|OF|$

C. $|AB|>4|OF|$　　D. $\angle OAM+\angle OBM<180^\circ$

19. (2022·新高考Ⅰ) 已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$ 上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P，Q 两点，则 (　　)

A. C 的准线为 $y=-1$　　B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$　　D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

20. (2014 辽宁) 已知点 $A(-2,3)$ 在抛物线 $C:y^2=2px$ 的准线上，过点 A 的直线与 C 在第一象限相切于点 B，记 C 的焦点为 F，则直线 BF 的斜率为 (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

21. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 与点 $M(-2,2)$，过 C 的焦点，且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ 则 $k=$ _____.

高中课程资源微信：NSJ2026

22. 已知 F 是抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点，A，B 是 C 上的两个点，线段 AB 的中点为 $M(2,2)$，则 $\triangle ABF$ 的面积等于 _____.

23. 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=-2$，在抛物线 C 上存在 A、B 两点关于直线 $l: x+y-7=0$ 对称，设弦 AB 的中点为 M，O 为坐标原点，则 $|OM|$ 的值为 _____.

高中课程资料微信：NSJ2026

作业

1. (2016·新课标Ⅰ) 以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A、B 两点，交 C 的准线于 D、E 两点．已知 $|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

2. (2017·新课标Ⅱ) 已知 F 是抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N．若 M 为 FN 的中点，则 $|FN|=$ _____.

3. (2011·新课标) 已知直线 l 过抛物线 C 的焦点，且与 C 的对称轴垂直．l 与 C 交于 A，B 两点，$|AB|=12$，P 为 C 的准线上一点，则 $\triangle ABP$ 的面积为（　　）

A. 18　　B. 24　　C. 36　　D. 48

4. (2014·新课标Ⅰ) 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则 $|QF|=$（　　）

A. $\frac{7}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 2

5. 已知抛物线 C 的顶点坐标为原点，焦点在 x 轴上，直线 $y=x$ 与抛物线 C 交于 A，B 两点，若 $P(2,2)$ 为 AB 的中点，则抛物线 C 的方程为 _____.

高中课程资料微信·NSJ2026